

1. Izračun enostavnih elektrostatičnih polj

1.1 Elektrostatično polje krogelne elektrine

Za električno polje osamljene krogelne elektrine velja:

- elektrina je na površini krogle enakomerno porazdeljena,
- polje je prostorsko radialno polje, ekvipotencialne ploskve so koncentrične krogelne površine.

Naboj določimo kot:

$$Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \int_V \rho dV \quad (1.1)$$

Absolutna vrednost gostota električnega pretoka na ekvipotencialni ploskvi na razdalji r od središča naelektrane krogle je:

$$D = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2}. \quad (1.2)$$

Električno poljska jakost E izračunamo kot:

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}. \quad (1.3)$$

Električni potencial $V(r)$ na ekvipotencialni krogelni ploskvi s polmerom r je:

$$V(r) = \int_r^{r_\infty} \vec{E}(r) \cdot dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_r^{r_\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r}. \quad (1.4)$$

Napetost med dvema ekvipotencialnima ploskvama na razdaljah r_1 in r_2 je:

$$U_{12} = U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.5)$$

Če obe ekvipotencialni ploskvi okovinimo, dobimo izraz za kapacitivnost krogelnega kondenzatorja:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}. \quad (1.6)$$

Električno poljsko jakost lahko zapišemo s pomočjo napetosti med elektrodama:

$$E(r) = \frac{U_{12}}{r^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}. \quad (1.7)$$

Največjo električno poljsko jakost dobimo na površini krogle:

$$E(r_0) = \frac{U}{r_0^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_2}\right)}, \quad (1.8)$$

oziroma, ko gre r_2 proti neskončnosti:

$$E(r_0) = \frac{U}{r_0}. \quad (1.9)$$

Z manjšanjem gre radija torej električna poljska jakost proti velikim vrednostim (problem konic in ostrih robov).

1.2 Elektrostatično polje valjne elektrine

Za električno polje neskončno dolgega naelektrenega valja velja:

- elektrina po površini valja je enakomerno porazdeljena,
- elektrostatično polje je ravninsko radialno polje.

Veljajo naslednji izrazi:

$$Q = q \cdot l = \bar{D} \cdot \bar{A} = D \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \quad (1.10)$$

kjer so:

q - elektrina na enoto dolžine valja,

t - polmer ekvipotencialne ploskve in

l - dolžina valja.

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{q \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot l} = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (1.11)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r} \quad (1.12)$$

Električni potencial $V(r)$ na ekvipotencialni ploskvi (koncentričnem valju) s polmerom r , pri čemer smo kot izhodišče potenciala izbrali ekvipotencialko r_0 , je:

$$V(r) = \int_r^{r_0} E \cdot dr = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_r^{r_0} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_0}{r}, \quad (1.13)$$

$$U_{12} = U = V_1 - V_2 = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (1.14)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{q \cdot l}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (1.15)$$

Električno poljsko jakost lahko zapišemo s pomočjo napetosti med elektrodama:

$$E(r) = \frac{U_{12}}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (1.16)$$

Največjo vrednost električne poljske jakosti dobimo na površini notranjega valja:

$$E(r_1) = \frac{U_{12}}{r_1 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = E_{\max}. \quad (1.17)$$

1.3 Elektrostatično polje ravninske elektrine

1.3.1 Osamljena ravninska elektrina

Pri ravnini se elektrina se enakomerno porazdeli na obe strani.

$$Q = 2 \cdot \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot 2 \cdot A \quad (1.18)$$

$$D = \frac{Q}{2 \cdot A} \quad (1.19)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \quad (1.20)$$

Električni potencial je podan z:

$$V(x) = \int_x^{x_0} E \cdot dx = \frac{Q}{2 \cdot \varepsilon \cdot A} \cdot (x_0 - x) \quad (1.21)$$

Električna poljska jakost je konstantna, električni potencial v smeri električne poljske jakosti enakomerno upada, ekvivalentne ploskve so vzporedne ravnine.

1.3.2 Dve nasprotnoimensko naelektreni ravnini

Dve ekvipotencialni ploskvi okovinimo in nanju priključimo napetost U . V prostoru med naelektrenima ravninama se polji seštevata, v zunanosti pa kompenzirata. Elektrini sta zbrani le na notranji strani.

$$D = \frac{Q}{A} \quad (1.22)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A} \quad (1.23)$$

$$U = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A} \cdot d = E \cdot d \quad (1.24)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} \quad (1.25)$$

1.4 Električno polje dveh točkastih elektrin

Skupna električna poljska jakost v točki na razdalji r_1 in r_2 od obeh elektrin je:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1^2} \cdot \vec{1}_{r_1} + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2^2} \cdot \vec{1}_{r_2} \quad (1.26)$$

Električni potencial v točki T je:

$$V_T = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{01}} \right) + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{02}} \right), \quad (1.27)$$

kjer sta r_{01} in r_{02} razdalji obeh točkastih elektrin od točke, kjer je izhodišče potenciala. Če privzamemo, da je izhodišče potenciala v neskončnosti, dobimo:

$$V_T = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2}, \quad (1.28)$$

1.5 Električno polje dveh enakih nasprotnoimenskih električnih premic

Električnega polja dveh vzporednih enakih nasprotnoimenskih elektrin uporabljamo tudi pri izračunih nadzemnih vodov.

V točki T(x,y) je električno polje podano z električno poljsko jakostjo:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} \cdot \vec{1}_{r_1} - \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2} \cdot \vec{1}_{r_2} \quad (1.29)$$

$$V_T = V_1 + V_2 = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\ln \frac{a}{r_1} - \ln \frac{a}{r_2} \right) = \frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1.30)$$

Ekvipotencialke morajo izpolnjevati pogoj:

$$\frac{r_2}{r_1} = k^2 = \text{konstanta} \quad (1.31)$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = k^2, \quad (1.32)$$

ki jo preuredimo v obliko

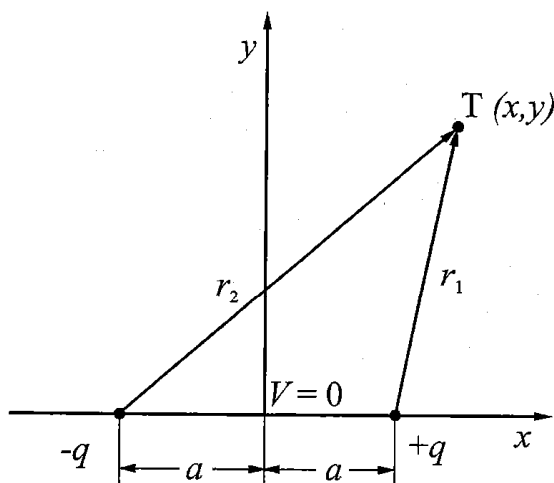
$$\left(x - a \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2 \cdot a \cdot k}{k^2 - 1} \right)^2 \quad (1.33)$$

Dobljena enačba predstavlja družino krožnic, ki imajo središče na x osi, v oddaljenosti x_n od koordinatnega izhodišča in s polmeri r_n .

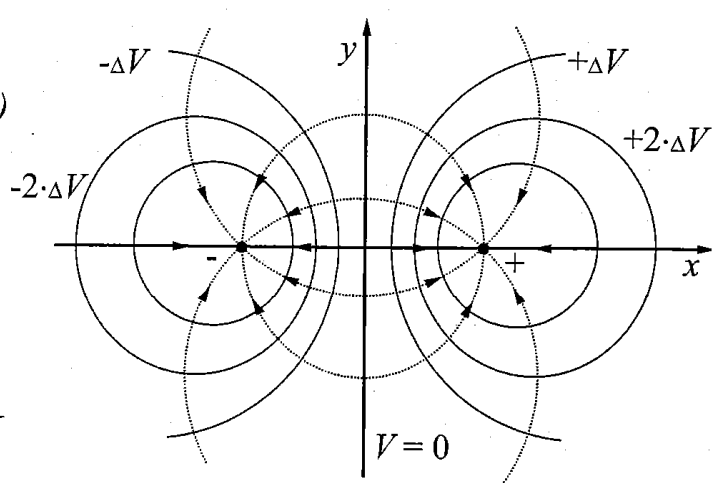
$$x_n = \pm a \cdot \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \quad (1.34)$$

$$r_n = \frac{2 \cdot a \cdot k}{k^2 - 1} \quad (1.35)$$

Ekvipotencialne ploskve so valji.



a) razmestitev elektrin



b) slika potencialnega polja

Slika 1: Električno polje dveh raznoimenskih premih elektrin.

Viri

J. Voršič, J. Pihler, Tehnika visokih napetosti in velikih tokov, Univerza v Mariboru, FERl, Maribor 2008.